Chapitre II
Lois de la magnétostatique

September 16, 2014

Contents

1 Flux du champ magnétique **2**

1.1 Divergence du champ $\vec{B}$ 2

1.2 Propriétés 3

2 Circulation de $\vec{B}$ **5**

2.1 Circulation du champ autour d'un fil infini 6

2.2 Le théorème d'Ampère 6

2.3 Exemple: le solénoïde infini 7

3 Relations de passage de $\vec{B}$ d'un milieu à un autre **9**

4 Actions et travail des forces magnétiques **12**

4.1 Forces magnétiques 12

4.2 Travail des forces magnétiques 14

5 Travaux dirigés: série II **18**

6 Solution de la série II **20**

Dans ce chapitre, nous montrons à travers des calculs explicites que l'induction magnétique $\vec{B}$ satisfait les 2 equations fondamentales suivantes:

$$
\begin{array}{llll}
i)\ \operatorname{div}\vec{B}=0 & \Rightarrow & \iint \vec{B}.d\vec{S}=0 & : \text{ consevartion du flux magnétique} \\
ii)\ rot\vec{B}=\mu_0\vec{j} & \Rightarrow & \int \vec{B}.d\vec{l}=\mu_0 I & : \text{ forme locale du théorème d'Ampère}
\end{array}
$$

Nous étudions aussi les forces magnétiques et leurs actions.

1 Flux du champ magnétique

1.1 Divergence du champ $\vec{B}$

La divergence du champ d'induction magnétique $\vec{B}$ est nulle

$$
\operatorname{div}\vec{B} = 0
$$

<u>*Preuve*</u>:

On part de la relation explicite (**??**) de l'induction magnétique

$$
\vec{B}(M)=\frac{\boldsymbol{\mu}_0}{4\pi}\iiint_P d\tau\left(\vec{j}(P)\wedge\frac{\overrightarrow{PM}}{|PM|^3}\right)
$$

et on agit scalairement par $\vec{\nabla}_M$:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}_M\vec{B}(M) &= \frac{\boldsymbol{\mu}_0}{4\pi}\operatorname{div}_M\left[\iiint_P d\tau\left(\vec{j}(P)\wedge\frac{\overrightarrow{PM}}{|PM|^3}\right)\right] \\
&= \frac{\boldsymbol{\mu}_0}{4\pi}\iiint_P d\tau\left[\operatorname{div}_M\left(\vec{j}(P)\wedge\frac{\overrightarrow{PM}}{|PM|^3}\right)\right]
\end{aligned}
$$

De cette relation, on voit que pour avoir $\operatorname{div}_M\vec{B}=0$, on doit avoir la propriété:

$$
\operatorname{div}_M\left(\vec{j}(P)\wedge\frac{\overrightarrow{PM}}{|PM|^3}\right)=0 \tag{1.1}
$$

Pour verifier cette propriété, on utilise la relation de dérivation suivante

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}(\vec{u}\wedge\vec{w}) &= \vec{\nabla}.(\vec{u}\wedge\vec{w}) \\
&= \vec{w}.\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{u}\right)-\vec{u}.\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{w}\right) \\
&= \vec{w}.rot\ \vec{u}-\vec{u}.rot\vec{w}
\end{aligned}
$$

an posant

$$\vec{u} = \vec{j}\,(P)\,, \qquad \vec{w} = \frac{\overrightarrow{PM}}{|PM|^3}$$

on déduit

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}_{_M}\left(\vec{j}\,(P) \wedge \tfrac{\overrightarrow{PM}}{|PM|^3}\right) &= \underbrace{\frac{\overrightarrow{PM}}{|PM|^3}.rot_{_M}\vec{j}\,(P)}_{=\vec{0}} - \vec{j}\,(P)\,.rot_{_M}\tfrac{\overrightarrow{PM}}{|PM|^3} \\
&= -\vec{j}\,(P)\,.rot_{_M}\tfrac{\overrightarrow{PM}}{|PM|^3}
\end{aligned}$$

car $rot_{_M}\ \vec{j}\,(P) = \vec{0}$; la densité de courant *ne dépend pas* de M. Le terme qui reste est aussi nul à cause de la propriété $\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} f = 0$, càd:

$$rot_{_M}\left(\frac{\overrightarrow{PM}}{|PM|^3}\right) = -rot_{_M}\left[\overrightarrow{\mathrm{grad}}_{_M}\left(\frac{1}{|PM|}\right)\right] = \vec{0}$$

1.2 Propriétés

La relation $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$ conduit à *2 conséquences* remarquables:

a) conservation du flux

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \qquad \Rightarrow \quad \iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{div}\,\vec{B}\ d^3\tau = \int_{\mathcal{S}=\partial\mathcal{V}} \vec{B}.d\vec{S} = \Phi_{_B} = 0$$

Le flux totale $\Phi_{_B}$ du champ $\vec{B}$ à travers $\mathcal{S}$ soit nulle.

Remarques

i) Cette loi est aussi valable même en *régime variable*, voir chapitre 4.

ii) le flux $\Phi_{_B} = 0$ montre une différence fondamentale entre $\vec{B}$ et le champ électrostatique $\vec{E}$ dont le flux $\Phi_{_E}$ est donnée par

$$\boxed{\Phi_{_E} \ = \int_{\mathcal{S}} \vec{E}.d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}}$$

Il n y a *pas de charge magnétique* analogue à la charge électrique.
La source la plus élémentaire de champ magnétique est un dipôle comme pour l'aimant dont on ne peut dissocier le pôle nord du pôle sud.

b) le potentiel vecteur

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \qquad \Rightarrow\ \vec{B} = rot\ \vec{A} \ = \ \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

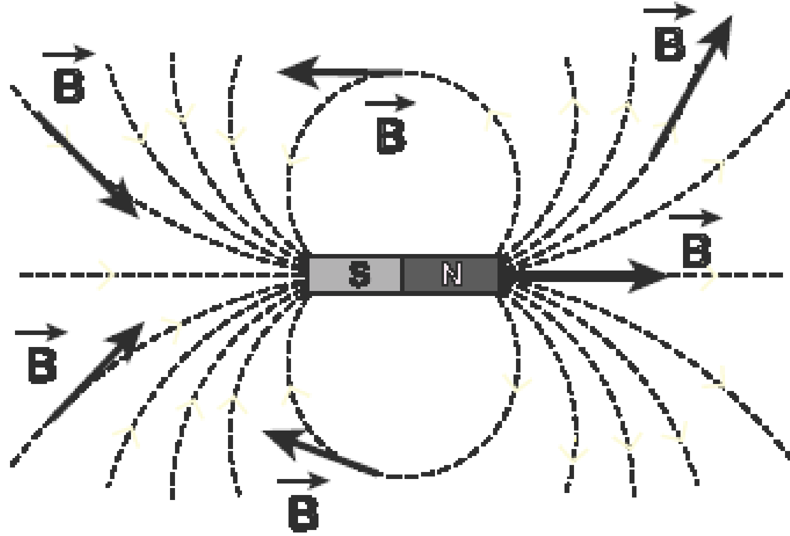


Figure 1: *champ d'induction magnétique créé par un aimant ayant 2 pôles: nord N et sud S avec des lignes de champs orientées de N vers S.*

$\vec{A}$ est appelé le *pontentiel vecteur*. On dit que $\vec{B}$ *dérive* de $\vec{A}$.
Notons aussi:

i) *Le potentiel vecteur $\vec{A}$ n'est pas unique et ne peut être physique*; on peut aussi prendre comme potentiel vecteur de $\vec{B}$:

$$\vec{A'} = \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}} f \quad , \quad \forall f$$

avec f une fonction arbitraire. Ceci car

$$rot(\overrightarrow{\text{grad}} f) = \vec{0}$$

ii) *Potentiel vecteur d'une distribution de courants*

courant volumique	*circuit filiforme*
$\vec{A} = \frac{\boldsymbol{\mu}_0}{4\pi} \iiint d\tau \ \frac{\vec{j}(P)}{\lvert PM \rvert}$	$\vec{A} = \frac{\boldsymbol{\mu}_0}{4\pi} \oint \frac{I \vec{dl}}{\lvert PM \rvert}$

<u>*Preuve*</u>

De l'expression du champ magnétique

$$\vec{B}(M) = \frac{\boldsymbol{\mu}_0}{4\pi} \iiint_P d\tau \ \left[\vec{j}(P) \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{\lvert PM \rvert^3} \right]$$

et vue que

$$\frac{\overrightarrow{PM}}{|PM|^3} = -\vec{\nabla}_M \left(\frac{1}{|PM|}\right)$$

on a:

$$\vec{B}(M) = \frac{\boldsymbol{\mu}_0}{4\pi} \iiint_P d\tau \, \left[\vec{\nabla}_M \left(\frac{1}{|PM|}\right) \wedge \vec{j}(P)\right] \tag{1.2}$$

Après, on utilise l'identité

$$\vec{\nabla}_M \wedge \left(\frac{\vec{j}(P)}{|PM|}\right) = \vec{\nabla}_M \left(\frac{1}{|PM|}\right) \wedge \vec{j}(P) + \frac{1}{|PM|} \underbrace{\vec{\nabla}_M \wedge \vec{j}(P)}_{\vec{0}}$$

Remplacant dans (??), on a:

$$\begin{aligned} \vec{B}(M) &= \tfrac{\boldsymbol{\mu}_0}{4\pi} \iiint_P d\tau \, \left[rot_M \tfrac{\vec{j}(P)}{|PM|}\right] \\ &= rot_M \underbrace{\left[\frac{\boldsymbol{\mu}_0}{4\pi} \iiint_P d\tau \, \frac{\vec{j}(P)}{|PM|}\right]}_{\vec{A}(M)} \\ &= rot_M \vec{A}(M) \end{aligned}$$

2 Circulation de $\vec{B}$

Outre div $\vec{B} = 0$, le champ $\vec{B}$ *satisfait*

$$rot\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

La *version intégrale* de cette equation est donnée par le théorème suivant:

Théorème d'Ampère

$$\boxed{\oint_\Gamma \vec{B}.\overrightarrow{dl} \;=\; \mu_0 \sum_{\text{algebrique}} I_{int}} \tag{2.1}$$

La circulation du champ $\vec{B}$ sur une courbe fémée Γ délimitant une surface ouverte Σ est proportionelle à la somme algebrique des courants I_i qui traversent Σ.

On fera le calcul pour le cas *d'un fil infini* (OZ) parcouru par un courant permanent I. Comme nous l'avons vu auparavant, ce fil admet la symétrie cylindrique et créé le champ d'induction

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \vec{e}_\varphi$$

2.1 Circulation du champ autour d'un fil infini

En remplacant $\vec{B}$ et $\overrightarrow{dl} = d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\varphi\vec{e}_\varphi + dz\vec{e}_z$, le terme de gauche de l'eq(2.1) s'écrit comme

$$\oint_{\Gamma=\partial\Sigma} \vec{B}.\overrightarrow{dl} = \oint_{\Gamma} \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\vec{e}_\varphi.\overrightarrow{dl} = \oint_{\Gamma} \frac{\mu_0 I}{2\pi}d\varphi$$

son expression dépend de la courbe Γ. On distingue 3 cas possibles:

(a) cas $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

Γ est un cercle d'axe $\overrightarrow{OZ}$ entrelacant le fil une seule fois $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$

$$\boxed{\oint_{\Gamma} \vec{B}.\overrightarrow{dl} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\varphi = \mu_0 I}$$

(b) cas $0 \leq \varphi \leq 2N\pi$

Γ est un contour circulaire d'axe $\overrightarrow{OZ}$ mais entrelacant le fil N fois

$$\boxed{\begin{aligned}\oint_{\Gamma} \vec{B}.\overrightarrow{dl} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^{2N\pi} d\varphi \\ &= \mu_0 N I\end{aligned}}$$

(c) cas ou Γ est un contour qui *n'entrelace pas* fil $\overrightarrow{OZ}$

$$\boxed{\oint_{\Gamma} \vec{B}.\overrightarrow{dl} = 0}$$

Remarque

Ce résulat, établit ici pour le cas du fil infini, est valable *pour tout conducteur.*

2.2 Le théorème d'Ampère

Enoncé du théorème:

La circulation de $\vec{B}$ le long d'une courbe $\Gamma = \partial\mathcal{S}$, *orientée et fermée*, appelée *contour d'Ampère*, est égale à $\mu_0 \times$ la somme algébrique des courants I_{int} qui traversent la surface $\mathcal{S}$ délimitée par Γ.

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}.\overrightarrow{dl} = \mu_0 \sum_{\text{algebrique}} I_{int} \qquad \text{théorème d'Ampère}$$

Exemple

Le sens positif de I est détérminé à partir du sens positif de la circulation sur le circuit en applicant la règle de la main droite.

Propriétés

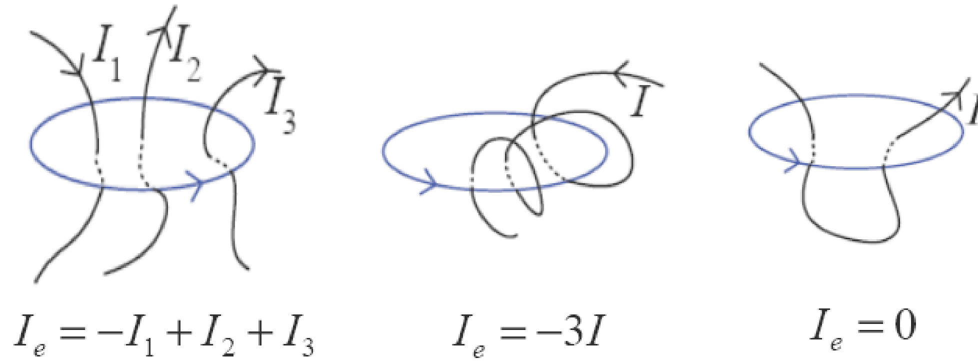


Figure 2: *somme algebrique des I_i traversant la surface S délimitée par la courbe* Γ.

i) Le théorème d'Ampère est fondamental;

il relie le champ $\vec{B}$ dans le vide aux courants permanents I_i.

Ce théorème *n'est pas valable en régime variable*.

ii) *Relation* $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

Le théorème d'Ampère est donné par une intégrale;

pour obtenir la relation locale que vérifie $\vec{B}$; il suffit de procéder comme suit

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma=\partial\mathcal{S}} \vec{B}.\overrightarrow{dl} &= \iint_{\mathcal{S}} rot\vec{B}.d\vec{S} \\ \mu_0 I &= \mu_0 \iint_{\mathcal{S}} \vec{j}.d\vec{S} \end{aligned}$$

et par suite

$$\iint_{\mathcal{S}} rot\vec{B}.d\vec{S} = \mu_0 \iint_{\mathcal{S}} \vec{j}.d\vec{S}$$

ou encore, vu que la surface $\mathcal{S}$ est *quelconque*

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

2.3 Exemple: le solénoïde infini

Soit un solénoide $\mathbb{S}$ infini d'axe $\overrightarrow{OZ}$ parcouru par un courant permanent I et ayant N spires par unité de longueur, voir fig 9

La symétrie cylindrique de $\mathbb{S}$ implique:

$$\vec{B}(M) = \vec{B}(\rho).$$

$\Pi_s = (\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$ est un plan de symétrie du sélénoide:

$$\vec{B}(\rho) = B(\rho)\,\vec{e}_z$$

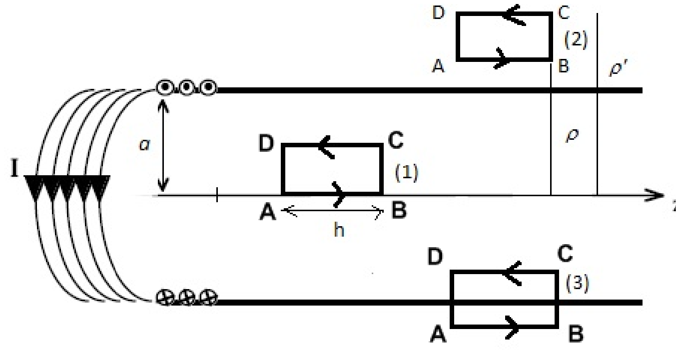


Figure 3: *théorème d'Ampère appliqué* au *solénoide infini d'axe* $\overrightarrow{OZ}$

Remarque:
Pour le cas particulier $\rho = 0$, càd sur l'axe $\overrightarrow{Oz}$, on a:

$$\vec{B} = \boldsymbol{\mu}_0 N I\ \vec{e}_z = \overrightarrow{constante}$$

Dans le cas général, on utilise le théoreme d'Ampère pour calculer $B\,(\rho)$:

$$\oint_\Gamma \vec{B}.\overrightarrow{dl} \quad = \quad \mu_0 \sum_{\text{algebrique}} I_{int}$$

La courbe d'Ampère Γ est un rectangle $ABCD$
Selon le choix de Γ, on distingue *trois cas*:

- <u>*cas du contour*</u> (1)
  Pas de courant qui traverse la surface délimitée par le contour,

  $$\int \vec{B}.\overrightarrow{dl} = 0$$

  D'autre part, on a:

  $$\begin{aligned} \oint_\Gamma \vec{B}.\overrightarrow{dl} &= \int_{AB} B\vec{e}_z.\overrightarrow{dl} + \underbrace{\int_{BC} B\vec{e}_z.\overrightarrow{dl}}_{=0 \quad \text{car} \quad \overrightarrow{dl}=d\rho\ \vec{e}_\rho} + \int_{CD} B\vec{e}_z.\overrightarrow{dl} + \underbrace{\int_{DA} B\vec{e}_z.\overrightarrow{dl}}_{=0} \\ &= \int_{AB} Bdz - \int_{CD} Bdz \\ &= (B_{AB} - B_{CD}) \times h \end{aligned}$$

Donc le champ $\vec{B}$ à l'interieur du solénoide infini est uniforme

$$B_{AB} = B_{CD} = \mu_0 NI$$

- <u>*cas du contour*</u> (2)
  On obtient le même résultat $(B_{AB} - B_{CD}) \times h = 0$ que pour le cas précédent, c'est à dire un champ uniforme à l'extérieur. Mais comme ce champ doit être nul à l'infini, on en déduit qu'il est nul partout.

  $$B_{AB} = B_{CD} = 0$$

  on redécouvrera ce résultat dans le cas suivant.

- <u>*cas du contour*</u> (3)
  Dans ce cas, la surface délimitée par le contour est traversée par $N \times h$ courants entrants; par suite nous avons par un calcul similaire auparavant:

  $$(B_{AB} - B_{CD}) \times h = -\mu_0 NI \times h \quad \Rightarrow \quad B_{AB} - B_{CD} = -\mu_0 NI$$

  Comme on sait que le terme $B_{CD} = \mu_0 NI$, il en découle que le champ d'induction B_{AB} à l'exterieur du sélénoide est nul.

  $$B_{AB} = 0$$

3 Relations de passage de $\vec{B}$ d'un milieu à un autre

Soit $(\mathcal{S})$ une distribution surfacique (nappe $\mathbb{R}^2$) de courant $\vec{j}_s$ qui sépare l'espace $\mathbb{R}^3$ en *2 régions*: $(R1)$ et $(R2)$.
$\vec{n}_{12}$ le vecteur normal à $(\mathcal{S})$ orienté de (1) vers (2) comme dans la fig 4.

Question:
comment se comporte $\vec{B}$ à la traversée de cette nappe de courant?

a) *Relations de passage*
A la traversée d'une nappe de courant, la *composante normale* $\vec{B}_\perp$ du champ magnétique reste <u>*continue*</u> et la *composante tangentielle* $\vec{B}_{//}$ du champ magnétique est <u>*discontinue*</u>.

$$\begin{aligned} \left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1\right).\vec{n}_{12} &= 0 \\ \left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1\right) \wedge \vec{n}_{12} &= \mu_0 \vec{j}_s \end{aligned}$$

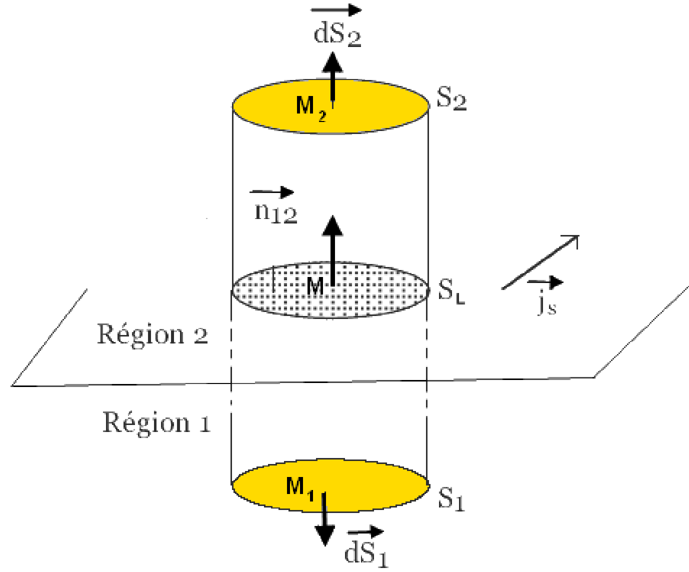


Figure 4: *nappe de courant séparant l'espace en 2 régions. Continueté de la composante normale $\vec{B}_{\perp}$ à la traversée de la nappe*

Par contre, le potentiel vecteur $\vec{A}$ est toujours continu.

b) *Preuve*

$i)$ <u>continuité de $\vec{B}_{\perp}$</u>

Soit M un point appartenant à la nappe de courant

M_1 et M_2 : 2 points voisins de M sur la normale à $(\mathcal{S})$

▶ Le flux de $\vec{B}$ étant *conservatif*

$$\Phi_B = \iint_{\text{cylindre}} \vec{B}.d\vec{S} = 0$$

Par conséquent le flux sortant du cylindre de generatrices parallèles à $\vec{n}_{12}$ est

$$\iint_{\mathcal{S}_1} \vec{B}.d\vec{S} + \iint_{\mathcal{S}_L} \vec{B}.d\vec{S} + \iint_{\mathcal{S}_2} \vec{B}.d\vec{S} = 0$$

où S_L est la *surface latérale* de hauteur

$$h = M_1 M_2$$

▶ Lorsqu'on fait tendre cette surface vers zéro ($\mathcal{S}_1$ tend vers $\mathcal{S}_2$), càd

$$M_1 \to M_2, \qquad \mathcal{S}_L \to 0$$

on obtient

$$\begin{aligned}\iint_{\mathrm{S}_1} \vec{B}.d\vec{S} + \iint_{\mathrm{S}_2} \vec{B}.d\vec{S} &= \iint_{\mathrm{S}_1} \left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1\right).\vec{n}_{12} dS \\ &= 0\end{aligned}$$

ou on a utilisé

$$d\vec{S}_2 = -d\vec{S}_1 = \vec{n}_{12} dS$$

Ce résultat étant valable quelque soit la surface $\mathcal{S}$ choisie:

$$\left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1\right).\vec{n}_{12} = B_{2n} - B_{1n} = 0$$

ii) <u>*discontinuété $\vec{B}_{//}$*</u>

Pour établir la discontinueté de $\vec{B}_{//}$, nous utilisons le th d'Ampère.

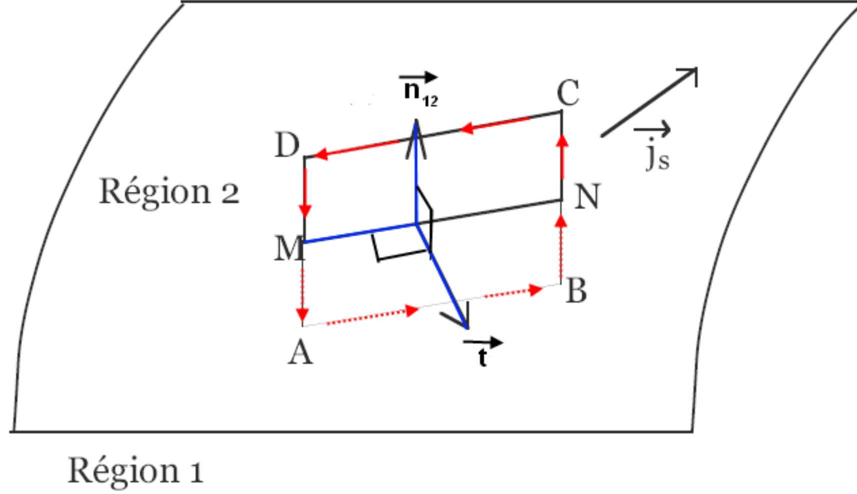


Figure 5: *discontinueté de la composante tangeantielle $\vec{B}_{//}$ à la traversée de la nappe.*

Considérons le *contour d'Ampère* donné par le rectangle ABCD de la fig

$$\int_{AB} \vec{B}.\overrightarrow{dl} + \int_{BC} \vec{B}.\overrightarrow{dl} + \int_{CD} \vec{B}.\overrightarrow{dl} + \int_{DA} \vec{B}.\overrightarrow{dl} = \mu_0 I$$

Le courant I est celui qui circule sur la nappe, autrement dit, il est défini par la densité de courant surfacique

$$I = \iint_{\text{surface ABCD}} \vec{j}.\overrightarrow{dS} = \int_{MN} \left(\vec{j}_s.\vec{t}\right) dl$$

où $(\frac{\overrightarrow{MN}}{MN}, \vec{n}_{12}, \vec{t})$ est un trièdre directe

$$\begin{aligned} \vec{n}_{12} \wedge \vec{t} &= \frac{\overrightarrow{MN}}{MN} \\ \overrightarrow{dl} &= dl \times \frac{\overrightarrow{MN}}{MN} \\ &= dl \times (\vec{n}_{12} \wedge \vec{t}) \end{aligned}$$

Dans la limite

$$\begin{aligned} (A, B) &\rightarrow (M, N) \\ (C, D) &\rightarrow (M, N) \end{aligned}$$

soit

$$\begin{array}{rcl} DA & \to & 0 \quad , \quad \int_{DA} .. \to 0 \\ BC & \to & 0 \quad , \quad \int_{BC} .. \to 0 \end{array}$$

on a:

$$\int_{AB} \vec{B}.\overrightarrow{dl} + \underbrace{\int_{BC} \vec{B}.\overrightarrow{dl}}_{=0} + \int_{CD} \vec{B}.\overrightarrow{dl} + \underbrace{\int_{DA} \vec{B}.\overrightarrow{dl}}_{=0} = \mu_0 I$$

d'où le théorème d'Ampère fournit

$$\int_{MN} \left(\vec{B}_1 - \vec{B}_2\right).\overrightarrow{dl} = \int_{MN} \mu_0 \left(\vec{j}_s.\vec{t}\right) dl$$

Puisque

$$\overrightarrow{dl} = (\vec{n}_{12} \wedge \vec{t})dl$$

et MN est quelconque, on doit avoir:

$$\begin{array}{rcl} (\vec{B}_1 - \vec{B}_2).\overrightarrow{dl} & = & (\vec{B}_1 - \vec{B}_2).(\vec{n}_{12} \wedge \vec{t})dl \\ & = & \left[(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \wedge \vec{n}_{12}\right].\vec{t}dl \\ & = & \mu_0 \vec{j}_s.\vec{t}dl \end{array}$$

ou on a utilisé la propriété du produit mixte

$$\vec{u}.\left(\vec{v} \wedge \vec{w}\right) = \quad \vec{w}.\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right) = \quad \vec{v}.\left(\vec{w} \wedge \vec{u}\right)$$

Puisque la direction de $\vec{t}$ est arbitraire, on a:

$$\left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1\right) \wedge \vec{n}_{12} = \mu_0 \vec{j}_s$$

4 Actions et travail des forces magnétiques

4.1 Forces magnétiques

On distingue 2 forces

- Force de Lorentz: elles concerne particules chargées
- force de laplace: elle concerne les conducteurs neutres

a) *Force de Lorentz*

(i) cas d'une particule

Une particule de charge q et de vitesse $\vec{v}$ dans $\vec{E}$, $\vec{B}$ subit la force

$$\begin{aligned} \vec{F} &= q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B} = q\vec{E} + \vec{J} \wedge \vec{B} \\ &= \vec{F}_{elec} + \vec{F}_{mag} \quad , \quad \text{force de Lorentz} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \vec{F}_{elec} &= q\vec{E} \quad : \quad \text{force électrique} \\ \vec{F}_{mag} &= q\vec{v} \wedge \vec{B} \quad : \quad \text{force magnétique} \end{aligned}$$

(ii) *cas de plusieurs particules*

On distingue: α) système discret et β) système continue

Dans un milieu *continue* ou chaque élément de volume $d\tau$ contient une densité de charges ϱ, l'élément de charge dq et de courant $d\vec{J}$ sont donnés par

$$dq = \varrho d\tau, \qquad d\vec{J} = \vec{j} d\tau$$

et sont sujets à l'élement de forces

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= dq\vec{E} + d\vec{J} \wedge \vec{B} \\ &= \varrho d\tau \vec{E} + \vec{j} d\tau \wedge \vec{B} \end{aligned}$$

ou encore

$$d\vec{F} = \underbrace{\left(\sum_{\alpha=1}^{k} n_\alpha q_\alpha \right) d\tau \vec{E}}_{d\vec{F}_{elec}} + \underbrace{\left(\sum_{\alpha=1}^{k} n_\alpha q_\alpha \vec{v}_\alpha \right) d\tau \wedge \vec{B}}_{d\vec{F}_{mag}} \tag{4.1}$$

c) *Force de Laplace*

- *si le conducteur neutre*

  Pour un conducteur est *électriquement neutre*; càd de charge totale nulle,

$$\sum_{\alpha=1}^{k} n_\alpha q_\alpha = 0$$

parcouru par une densité de courant $\vec{j}$ non nulle, on a:

$$d\vec{F}_{ele} = \vec{0} \quad , \quad \text{pas d'effet de } \vec{E}$$

d'ou

$$d\vec{F} = d\vec{F}_{mag} = \vec{j} d\tau \wedge \vec{B}$$

c'est la force qu'exerce un $\vec{B}$ externe sur une densité de courant $\vec{j}$ circulant dans un *conducteur neutre.*

- *si le conducteur est un circuit filiforme fermé*

$$\vec{j} d\tau \rightarrow I \overrightarrow{dl}$$

la force magnétique $d\vec{F}$ qui s'exerce sur un élément $\overrightarrow{dl}$ du fil est:

$$\boxed{d\vec{F} = I \overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}}$$

La force magnétique totale $\vec{F}$ qui s'exerce sur le circuit est alors:

$$\vec{F} = \oint_{\text{circuit}} I \overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}$$

force de Laplace

Cette force est utilisée pour étudier les interactions magnétiques entre de circuits filiformes.

4.2 Travail des forces magnétiques

Un circuit électrique filiforme (C) parcouru par un courant permanent I placé dans un champ d'induction magnétique $\vec{B}$ possède une énergie potentielle d'interaction magnétique.

$$E_p^{mag}$$

Pour calculer celle energie, on utilise la relation

$$dE_p^{mag} = -dW_{mag}$$

avec W_{mag} le travail des forces magnétiques.

a) *calcul de W_{mag}*

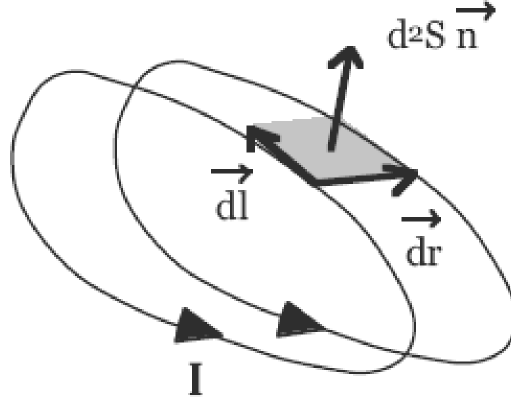


Figure 6: *Travail de la force de Laplace*

- *travail élémentaire:* $(d^2W)_{\text{elt de C}}$
  Considérons un élément $\overrightarrow{dl}$ d'un circuit filiforme (C) comme dans la figure.
  Cet élément subit une force de Laplace

$$\overrightarrow{dF} = I\overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}$$

Pour déplacer le circuit d'une quantité $\overrightarrow{dr}$, cette force doit fournir le travail

$$(d^2W)_{\text{elt de C}} \quad = \quad \overrightarrow{dF}.\overrightarrow{dr}$$

en remplacant $\overrightarrow{dF}$, on a:

$$(d^2W)_{\text{elt de C}} \quad = \quad I\left(\overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}\right).\overrightarrow{dr} \quad = \quad I\left(\overrightarrow{dr} \wedge \overrightarrow{dl}\right).\vec{B}$$

soit

$$(d^2W)_{\text{elt de C}} \quad = \quad I\ d^2\vec{S}.\vec{B} \tag{4.2}$$

où

$$\overrightarrow{dr} \wedge \overrightarrow{dl} \quad = \quad d^2\vec{S} = d^2S\vec{n}$$

surface élémentaire décrite lors du déplacement élémentaire

Les trois vecteurs $(\overrightarrow{dr}, \overrightarrow{dl}, \vec{n})$ forment un trièdre direct.
Dans l'expression (4.2), on reconnaît la quantité

$$d^2\Phi \quad = \quad \vec{B}.d^2\vec{S} \quad : \qquad \text{flux coupé}$$

flux magnétique élémentaire lors du dépacement

d'où

$$\boxed{(d^2W)_{\text{elt de C}} \quad = \quad I \times d^2\Phi}$$

- *travail de l'ensemble du circuit pour* un déplacement $\overrightarrow{dr}$

$$\begin{aligned} (dW)_{\text{circuit}} &= \oint_{\text{circuit}} I\,(d^2W)_{\text{elt de C}} \\ &= \oint_{\text{circuit}} Id^2\Phi \\ &= Id\Phi \end{aligned} \tag{4.3}$$

b) *Théoreme de Maxwell*

Le déplacement d'un circuit électrique fermé dans un champ d'induction magnétique extérieur $\vec{B}$ *engendre un travail* W_{mag} *des forces magnétiques égal au produit du courant I, traversant le circuit, par le flux* coupé Φ_c *par celui-ci lors de son déplacement.*

$$\boxed{W_{mag} \quad = I \times \Phi_c} \tag{4.4}$$

c) *Propriétés*

$i)$ de la relation (4.3), on tire

$$\begin{aligned} W_{mag} &= \textstyle\int_1^2 Id\Phi \\ &= I\,(\Phi_2 - \Phi_1) \end{aligned}$$

$ii)$ Comme le flux totale sortant de la surface (cylindrique) fermée est

$$\Phi_1 + \Phi_c - \Phi_2 = 0$$

- Φ_1 et Φ_2 sont les *flux à travers les surfaces* $\vec{S}_1$ et $\vec{S}_2$ et;
- Φ_c *le flux à travers la surface laterale* $\vec{S}_L$.

Rappelons que lors de son déplacement, le circuit balaye une surface $\vec{S}$ (cylindrique) férmée

$$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_L + \vec{S}_2$$

constituée par:

▶ une base $\vec{S}_1 = +S_1\vec{n}$ donnée par la surface du circuit en position (1)
▶ une base $\vec{S}_2 = -S_2\vec{n}$ donnée par la surface du circuit en position (2)
▶ la surface balyée S_L donnée par la surface latérale du cylindre

Par conséquent le flux coupé Φ_c n'est autre que

$$\boxed{\Phi_c \quad = \Phi_2 - \Phi_1 \quad , \quad \textit{flux coupé}}$$

en accord avec (4.4).

iii) règle du flux maximum: de la relation

$$dE_{pot}^{mag} = -dW_{mag}$$

et que l'évolution vers la situation d'équilibre correspondant à

$$\delta E_{pot}^{mag} < 0 \qquad \textit{minimum d'energie}$$

il en découle que

$$\delta W_{mag} > 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi_2 > \Phi_1$$

Sous l'action de $\vec{B}$, un circuit fermé (C) à tendence à se deplacer de telle manière que

le flux de $\vec{B}$ à travers le circuit soit *maximum*

5 Travaux dirigés: série II

Université Mohammed V **Année Universitaire 2014-2015**

Faculté des Sciences **SMP: S3**

Electricité II

Travaux Dirigés: Série 2

Exercice I: *nappe de courant et discontinuité de* $\vec{B}$

On considère une nappe plane conductrice de courant, d'épaisseur ε négligeable et traversée par un courant uniforme. On prend, la nappe dans le plan xOy, avec $-\frac{\varepsilon}{2} \leq z \leq \frac{\varepsilon}{2}$, et le vecteur densité de courant $\vec{j} = \varepsilon \vec{j}_s$ avec courant surfacique $\vec{j}_s = j_s \vec{e}_x$.

1) Faire un schéma d'illustration,

2) En utilisant les règles de symétrie, déterminer:

a) Les variables dont dépendent le champ d'induction magnétique $\vec{B}$,

b) Montrer que le champ $\vec{B}$ est dirigé suivant $\vec{e}_y$ (c'est à dire $\vec{B} = B\vec{e}_y$),

3) Pour calculer le composante B, on utilise le théorème d'Ampère,

a) Donner la forme de la courbe d'Ampère Γ, justifier,

b) En déduire l'induction magnétique $\vec{B}$ en tout point $M\,(x, y, z)$,

4) Calculer la valeur de $\vec{B}$ pour le cas $z = 0$,

5) Montrer que $\vec{B}$ est discontinue,

6) Déterminer à une constante près le potentiel vecteur $\vec{A}$ en tout point M de l'espace,

7) En déduire la constante dans le cas où $\vec{A}$ est nul à l'origine.

Exercice II: *Solénoide infini et calcul potentiel vecteur* $\vec{A}$

On considère un solénoide $\mathbb{S}$ infini d'axe $\overrightarrow{OZ}$, de base circulaire de rayon R, parcouru par un courant permanent I et ayant N spires par unité de longueur. On se propose de déterminer le champ d'induction magnétique $\vec{B}\,(M)$ et le potentiel vecteur $\vec{A}\,(M)$ en tout point M de l'espace.

1) Faire un schéma d'illustration,

2) En utilisant les règles de symétrie, déterminer:

a) Les variables dont dépendent le champ d'induction magnétique $\vec{B}$,

b) La direction du champ $\vec{B}$,

3) Pour calculer l'expression explicite du champ d'induction magnétique, on utilise le théorème d'Ampère,

a) Donner la forme de la courbe d'Ampère Γ, justifier le choix,

b) En déduire l'induction magnétique $\vec{B}$ en tout point $M\,(x, y, z)$,

4) Montrer que $\vec{B}$ est discontinue,

Pour déterminer le potentiel vecteur $\vec{A}\,(M)$, on utilisera une relation donnant sa circulation sur un contour fermé C que l'on déterminera.

5) En partant de la relation div $\vec{B} = 0$, montrer que $\oint_C \vec{A}.\vec{dl} = \iint_S \vec{B}.\vec{dS}$,
6) En utilisant les règles de symetries de la distribution de courant, donner:
a) La direction du champ $\vec{A}$ et les variables dont ils dépendent,
b) Le choix de la courbe C pour le calcul de la circulation de $\vec{A}$, justifier,
7) Déterminer le potentiel vecteur $\vec{A}$ en tout point de l'espace

Exercice III: *Force magnétique et effet Hall*

On veut déterminer le nombre n_e d'électrons de conduction que possède un atome de cuivre en utilisant l'effet Hall. Pour cela, on considère une plaquette rectangulaire $ABCD$ de cuivre dans le plan xOy, de longueur L $(0 \leq x \leq L)$), de largeur a $(0 \leq y \leq a)$, d'épaisseur b $(-\frac{b}{2} \leq z \leq \frac{b}{2})$ et traversée par une densité de courant surfacique uniforme $\vec{j} = j\vec{e}_x$. Cette plaquette est plongée dans un champ magnétique extérieur perpendiculaire $\vec{B} = B\ \vec{e}_z$. A l'équilibre, la tension de Hall mesurée entre les 2 bords de largeur de la plaquette est $U_H = 5.510^{-6}V$.

1) Faire un schéma d'illustration,
2) Décrire le phénomène physique observé, commenter,
3) Donner l'expression de la force $\vec{F}_m$ subit par les électrons
4) Sous l'effet de la force magnétique, les électrons sont déviés, donner la direction du champ électrique $\vec{E}$ induit
5) En déduire l'expression de la force totale subit par les électrons
6) Déterminer l'expression du champ $\vec{E}_H$ à l'équilibre en fonction de la vitesse v et B
7) En déduire la valeur de v en fonction de I, a, b et la densité n_e des électrons,
8) Calculer le nombre n_e d'électrons en fonction de B, I, a, b et E_H
9) En déduire le nombre n_e en fonction de U_H; on donne:

$$M_{mole}\,(cu) = 63g, \quad B = 1Tesla, \quad b = 10^{-4}m, \quad \varrho_{vol}\,(cu) = 9000kg/m^3$$
$$U_H = 5.510^{-6}V, \quad e = 1.610^{-19}C, \quad I = 10A, \quad N = 6.0210^{23} \text{ atomes/mole}$$

Exercice IV: *Interaction magnétique entre fil infini et un cadre*

Un fil rectiligne z'z de longueur infinie est parcouru par un courant d'intensité I_1. Dans un plan contenant z'z, on place un cadre carré ABCD indéformable, de côté a, parcouru par un courant I_2. Les côtés AB et CD sont parallèles à z'z. Soit y la distance qui sépare AB de z'z.

1) Faire un schéma,
2) Rappeler le champ magnétique $\vec{B}_1$ créé par le fil z'z
3) Déterminer la résultante des forces $\vec{F}_{12}$ exercées par le fil sur le cadre
4) Retrouver l'expression de $\vec{F}_{12}$ en utilisant la relation entre le travail et le flux magnétique

6 Solution de la série II

Exercice I: Nappe plane de courant

1) schema d'illustration

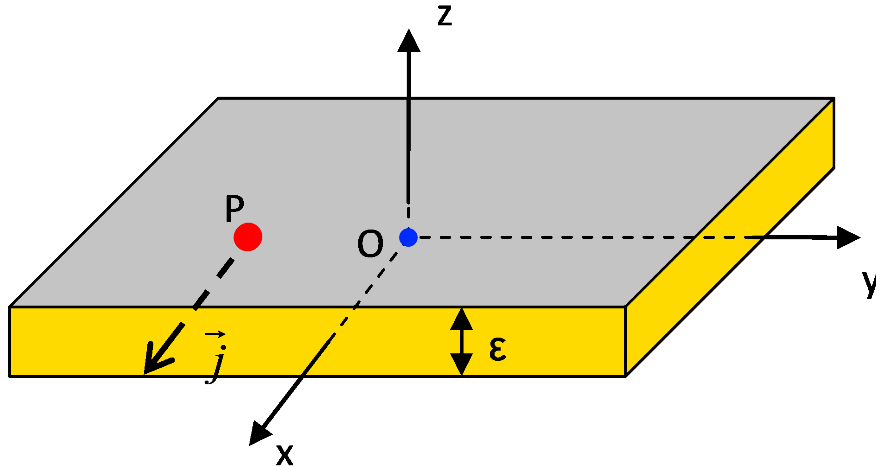


Figure 7: *Nappe plane de courant* $\vec{J} = j_s\ \vec{e}_x$.

2) Déterminer le champ d'induction magnétique $\vec{B}$ en tout point M de l'espace

a) *2 symetries de translations*: suivant x et y

$$\vec{B}\,(M) = \left| \begin{array}{l} B_x\,(z) \\ B_y\,(z) \\ B_z\,(z) \end{array} \right.$$

b) direction de $\vec{B}$

Le plan de la nappe (càd $\Pi_s = xOz$) est un plan de symetrie, donc

$$\vec{B} \perp \Pi_s \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = B\,(z)\,\vec{e}_z$$

3) *Théorème d'Ampère*

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}.\vec{dl} \quad = \quad \mu_0 I$$

a) la courbe d'Ampère Γ est un rectangle rectangle $ABCD$ de surface S, dont le sens de parcours positif est comme indiqué sur la figure **??**.

$$\text{surface de } ABCD = L_{AB} \times L_{BC} = \varepsilon \times L \quad , \quad \text{coté } BC{=}L$$

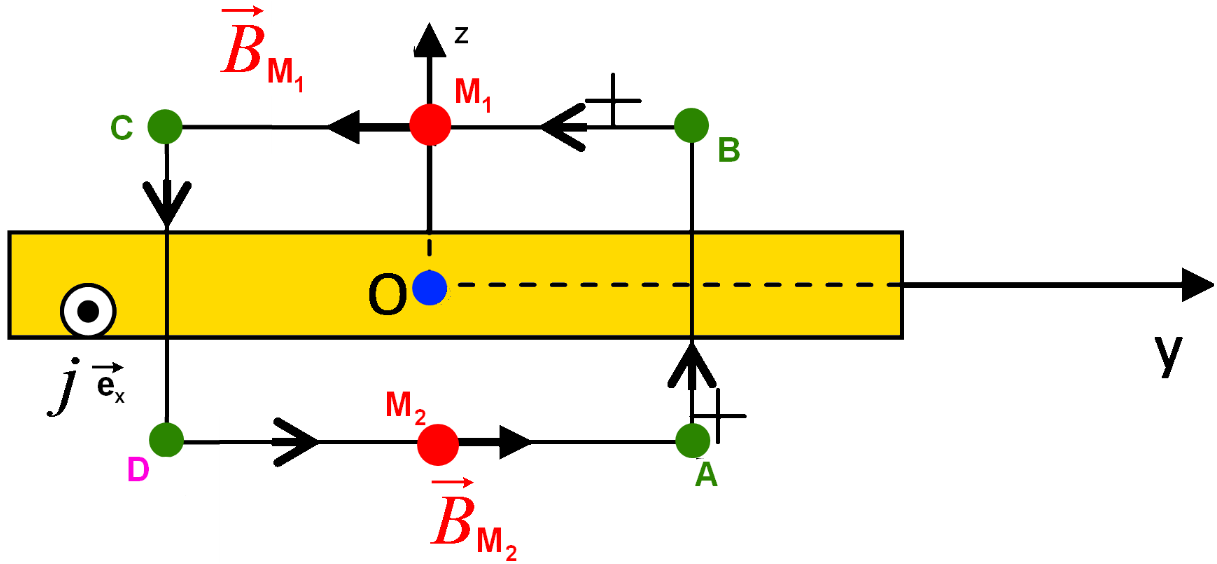


Figure 8: Contour d'Ampère.

Il passe par les points M_1 et M_2, symétriques par rapport à la nappe *b) Calcul de la composnate B*

i) calcul de $\oint_\Gamma \vec{B}.\vec{dl}$

$$\begin{aligned}\oint_\Gamma \vec{B}.\vec{dl} &= \oint_\Gamma Bdy\\ &= \left(\int_A^B + \int_B^C + \int_C^D + \int_D^A\right) B\\ &= \int_B^C Bdy + \int_C^D Bdy\\ &= -\int_B^C Bdy + \int_D^A Bdy\\ &= 2BL\end{aligned}$$

avec

$$\int_D^A dy = -\int_B^C dy = L$$

ii) calcul de I

$$\begin{aligned}\mu_0 I &= \mu_0 \iint_S \vec{J}.\vec{dS}\\ &= \mu_0 J \times S \qquad , \quad \text{car } \vec{J} = J\ \vec{e}_x\\ &= \mu_0 \underbrace{J \times \varepsilon}_{J_s} \times L = \mu_0 J_s \times L\end{aligned}$$

on a:

$$\begin{aligned}\mu_0 \iint_S \vec{J}.\vec{dS} &= \mu_0 J \times S\\ &= \mu_0\ J \times \varepsilon \times L\\ &= \mu_0 J_s \times L\end{aligned}$$

iii) résultat

$$\begin{array}{lcl} 2BL = \mu_0 J_s L & \Rightarrow & B = \frac{\mu_0 J_s}{2} = Cst \\ \vec{B}(M_1) & = & -\frac{\mu_0 J_s}{2}\vec{e}_y \\ \vec{B}(M_2) & = & \frac{\mu_0 J_s}{2}\vec{e}_y \end{array}$$

4) $\vec{B}$ au point $z = 0$

Au point O, origine de l'espace, on distingue 2 plans de symétrie de la nappe

xOy et xOz

donc $\vec{B}$ doit être perpendiculaire à ces 2 plans, c'est à dire

$$\vec{B} = \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ B \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \vec{B} = \left| \begin{array}{l} 0 \\ B \\ 0 \end{array} \right.$$

par conséquent $\vec{B}$ à l'origine O, et pour $z = 0$ en général, ne peut être que nul

$$\vec{B}(z = 0) = \vec{0}$$

5) $\vec{B}$ discontinue

$\vec{B}$ est tangent à la nappe de courant; il doit donc vérifier la relation de continuité

$$\vec{B}_{1T}(M) - \vec{B}_{2T}(M) \quad = \quad \mu_0 \vec{J}_s(M) \wedge \vec{n}_{21}$$

avec

$\vec{n}_{21}$ la normale orienté de 2 vers 1

Dans notre cas

$$\vec{J}_s(M) = J_s\ \vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{n}_{21} = \vec{e}_z$$

$$\vec{B}_{1T}(M) - \vec{B}_{2T}(M) \quad = \mu_0 J_s\ \vec{e}_x \wedge \vec{e}_z \quad = -\mu_0 J_s \vec{e}_y$$

ce qui est en accord avec

$$\vec{B}_1(M) - \vec{B}_2(M) \quad = -\frac{\mu_0 J_s}{2}\vec{e}_y - -\frac{\mu_0 J_s}{2}\vec{e}_y \quad = -\mu_0 J_s \vec{e}_y$$

ou on a utilisé

$$\vec{B}(M_1) = -\frac{\mu_0 J_s}{2}\vec{e}_y \quad , \quad \vec{B}(M_2) = \frac{\mu_0 J_s}{2}\vec{e}_y$$

6) le potentiel vecteur $\vec{A}$

a) symetrie de translation suivant x et suivant y

$$\vec{A} = \begin{vmatrix} A_x(z) \\ A_y(z) \\ A_z(z) \end{vmatrix}$$

b) direction de $\vec{A}$:

$yOz = \Pi_a$ est un plan d'antisymetrie

$$\vec{A} \perp \Pi_a \qquad \Rightarrow \vec{A}(z) = \begin{vmatrix} A_x(z) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

c) Expression de $\vec{A}$

De la relation $\vec{B} = rot\vec{A}$, on obtient

$$\begin{vmatrix} 0 \\ B(z) \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} A(z) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{\partial A}{\partial z} \\ 0-0 \end{vmatrix}$$

d'où

$$A = \int B dz$$

Trois cas à distinguer:

(*i*) $z > 0$

$$B(z) = -\frac{\mu_0 J_s}{2} \qquad \Rightarrow \qquad A(z) = -\frac{\mu_0 J_s}{2} z + C_1$$

(*ii*) $z < 0$

$$B(z) = \frac{\mu_0 J_s}{2} \qquad \Rightarrow \qquad A(z) = \frac{\mu_0 J_s}{2} z + C_2$$

(*iii*) $z = 0$

$$B = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A(0) = C_3$$

7) cas où $\vec{A}$ est nul à l'origine.

$$A(0) = C_3 = 0$$

la continuté de A exige que les constantes soient nulles,

$$\lim_{z \to 0^{\pm}} A(z) = 0 \quad \Longrightarrow \quad C_1 = C_2 = 0$$

<u>Exercice II</u>

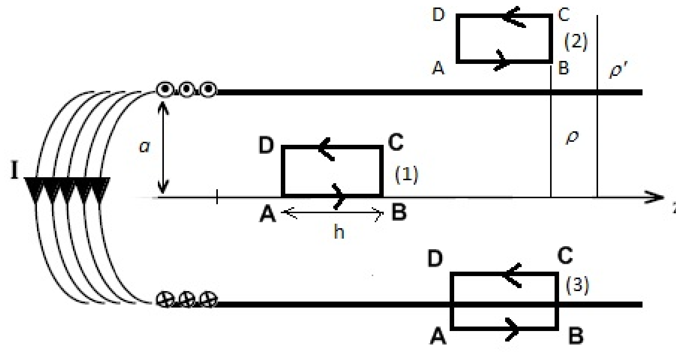


Figure 9: *théorème d'Ampère appliqué* au *sélénoide infini d'axe* $\overrightarrow{OZ}$

1) schema d'illustration: voir fig 9

2) règles de symetrie:

a) La symétrie cylindrique de $\mathbb{S}$ implique: $\vec{B}\,(M) = \vec{B}\,(\rho)$

b) La direction du champ $\vec{B}$

$\Pi_s = (\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$ est un plan de symétrie du solénoide:

$$\vec{B} \;\perp \vec{e}_z \quad \Rightarrow \quad \vec{B}\,(\rho) = B\,(\rho)\,\vec{e}_z$$

3) expression explicite de $\vec{B}$

a) courbe d'Ampère Γ:

rectangles ABCD comme dans la figure

Selon le choix de Γ, on distingue trois cas:

i) <u>*cas du contour*</u> (1)

Pas de courant qui traverse la surface délimitée par le contour,

$$\int \vec{B}.\overrightarrow{dl} = 0$$

D'autre part, on a:

$$\begin{aligned} \textstyle\int \vec{B}.\overrightarrow{dl} &= \textstyle\int_{AB} B\vec{e}_z.\overrightarrow{dl} + \underbrace{\int_{BC} B\vec{e}_z.\overrightarrow{dl}}_{=0} + \textstyle\int_{CD} B\vec{e}_z.\overrightarrow{dl} + \underbrace{\int_{DA} B\vec{e}_z.\overrightarrow{dl}}_{=0} \\ &= \textstyle\int_{AB} Bdz - \int_{CD} Bdz \\ &= (B_{AB} - B_{CD}) \times h \end{aligned}$$

Donc le champ $\vec{B}$ à l'interieur du solénoide infini est uniforme

$$B_{AB} = B_{CD} = \mu_0 NI$$

ii) <u>*cas du contour*</u> (2)
On obtient le même résultat $(B_{AB} - B_{CD}) \times h = 0$ que pour le cas précédent, c'est à dire un champ uniforme à l'extérieur. Mais comme ce champ doit être nul à l'infini, on en déduit qu'il est nul partout.

$$B_{AB} = B_{CD} = 0$$

on redécouvrera ce résultat dans le cas suivant.
iii) <u>*cas du contour*</u> (3)
Dans ce cas, la surface délimitée par le contour est traversée par $N \times h$ courants entrants; par suite nous avons par un calcul similaire auparavant:

$$(B_{AB} - B_{CD}) \times h = -\mu_0 NI \times h \quad \Rightarrow \quad B_{AB} - B_{CD} = -\mu_0 NI$$

Comme on sait que le terme $B_{CD} = \mu_0 NI$, il en découle que le champ d'induction B_{AB} à l'exterieur du sélénoide est nul.

$$B_{AB} = 0$$

iv) <u>*Conclusion*</u>

$$\vec{B}(\rho) = \begin{cases} \mu_0 NI \ \vec{e}_z & , \quad 0 \leq \rho < R \\ 0 & , \quad \rho > R \end{cases}$$

4) $\vec{B}$ est discontinue:

$$\vec{B}_{1T}(M) - \vec{B}_{2T}(M) = \mu_0 \vec{J}(M) \wedge \vec{n}_{21}$$

comme

$$\vec{n}_{21} = -\vec{e}_\rho, \qquad \vec{j} = NI \ \vec{e}_\varphi$$

on a bien la relation

$$\begin{aligned} \vec{B}_{1T} - \vec{0} &= -\mu_0 NI \ \vec{e}_\varphi \wedge \vec{e}_\rho \\ &= \mu_0 NI \ \vec{e}_z \end{aligned}$$

5) En partant de la relation

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = rot \ \vec{A}$$

par integration sur une surface S s'appuiant sur un contour C,

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{B} &= \iint_S rot\ \vec{A} \\ &= \oint_C \vec{A}.\overrightarrow{dl}\end{aligned}$$

6) règles de symetries de la distribution de courant

a) La symétrie cylindrique de $\mathbb{S}$ implique: $\vec{A}(M) = \vec{A}(\rho)$

La direction du champ $\vec{A}$

$\Pi_a = (\vec{e}_\rho, \vec{e}_z)$ est un plan d'antisymétrie du solénoide

$$\vec{A}\ \perp \vec{e}_\varphi \quad \Rightarrow \quad \vec{A}(\rho) = A(\rho)\,\vec{e}_\varphi$$

b) La courbe C est un cercle de rayon ρ et d'axe $\overrightarrow{Oz}$

Justification, elle est dictée par la symétrie cylindrique car

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{A}.\overrightarrow{dl} &= \oint_C A\rho d\varphi \\ &= A\oint_C \rho d\varphi \text{ car } A \text{ ne dépend pas de } \varphi \\ &= 2\pi\rho A\end{aligned}$$

7) Le potentiel vecteur $\vec{A}$ en tout point de l'espace

on applique la relation

$$\oint_C \vec{A}.\overrightarrow{dl} = \iint_S \vec{B}.\overrightarrow{dS}$$

ce qui conduit à:

$$\begin{aligned}A &= \tfrac{1}{2\pi\rho}\iint_S \vec{B}.\overrightarrow{dS} \\ &= \tfrac{1}{2\pi\rho}\iint_S B \times \rho d\rho d\varphi\end{aligned}$$

2 cas à distinguer selon la valeur de $\vec{B}$; càd:

$$\vec{B}(\rho) = \begin{cases} \mu_0 NI\ \vec{e}_z & , \quad 0 \le \rho < R \\ 0 & , \quad \rho > R \end{cases}$$

On a:

i) $\rho > R$

$$\begin{aligned}A(\rho) &= \tfrac{1}{2\pi\rho}\iint_S B\rho d\rho d\varphi \\ &= \tfrac{B}{2\rho}R^2 = \mu_0 NI\tfrac{R^2}{2\rho}\end{aligned}$$

ii) $\rho < R$

$$\begin{aligned}A(\rho) &= \tfrac{1}{2\pi\rho}\iint_S B\rho d\rho d\varphi \\ &= \tfrac{B}{2}\rho = \mu_0 NI\tfrac{\rho}{2}\end{aligned}$$

Exercice III: *Effet Hall classique*

1) schéma d'illustration: voir fig 10,

un electron de la plaquette du plan xOy de vitesse $\vec{v}$ se déplace suivant $\vec{e}_x$ sous

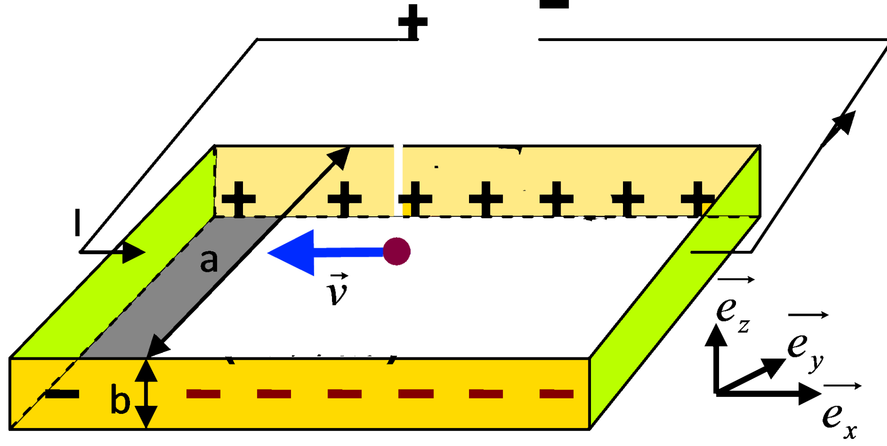


Figure 10: plaque rectangulaire normale à $\vec{e}_z$ de largeur a, d'épaiseur b et de longueur suffisamment grande.

l'effet d'une ddp aux induite par la ddp aux bords $x = 0$ et $x = L$ de la plaquette fournie par un générateur de courant dont le sens est comme désigné sur la figure. On a:

$$\vec{v} = v\vec{e}_x, \qquad v = -|v| \text{ dans le schéma}$$

2) phénomène physique observé: Effet Hall

Cette effet a une version classique et une version quantique selon l'intensité du champ magnétique exterieur $\vec{B}$.

Pour des valeurs du champ magnétique $\vec{B}$ relativement petites; le phénomène observé est comme suit, voir fig 11:

$a)$ deviation des électrons sous l'action de $\vec{B}$

$b)$ naissance d'un déficit de charge électrique aux 2 bords de la plaquette

$c)$ apparition d'une ddp aux 2 bords de la largeur de la plaqueette: A l'equilibre cette tension est la tension de Hall U_H qui induit un champ électrique $\vec{E}_H$

3) Force magnétique:

Sous l'effet de $\vec{B}$, l'électron de vitesse $\vec{v} = v\vec{e}_x$ est soumis à la force

$$\begin{aligned} \vec{F}_m &= -e\vec{v} \wedge \vec{B}, \qquad e = |e| = 1.60217733 \times 10^{-19}\,\text{C} \\ &= evB\vec{e}_y \end{aligned}$$

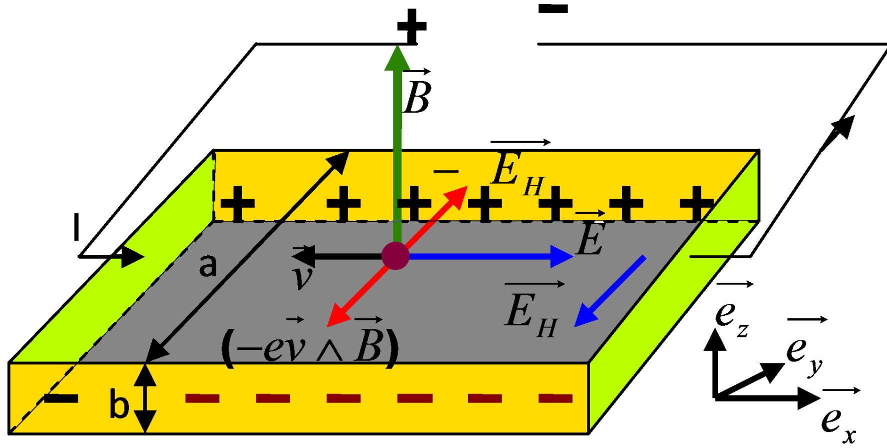


Figure 11: effet Hall classique: (i) déviation des charges sous l'effet du champ $\vec{B}$. (ii) naissance d'une ddp aux bornes de la largeur de la plaque

4) le déficit des charges entre les 2 faces $y = 0$ et $y = a$ crée une ddp

$$\Delta U = U_2 - U_1$$

et donc une champ électrique suivant $\vec{e}_y$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} U = E\vec{e}_y$$

5) réaction par opposition à $\vec{B}$
Le champ electrique $\vec{E} = E\vec{e}_y$ agit à son tour sur l'électron par une force électrique

$$\vec{F}_{el} = -e\vec{E} = -eE\vec{e}_y$$

Cette force s'oppose à la force magnétique $\vec{F}_m$ crée par $\vec{B}$.
L'expression de la force totale subit par l'électron est alors

$$\vec{F}_m + \vec{F}_{el} = (evB - eE)\,\vec{e}_y$$

6) Equilibre des forces $\vec{F}_m$ et $\vec{F}_{el}$ = Effet Hall, on a:

$$\vec{F}_m + \vec{F}_{el} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad evB = eE$$

ce qui donne

$$E_H = vB, \qquad \text{c'est la valeur du champ de Hall} \tag{6.1}$$

7) vitesse de déplacement des électrons: $\vec{v} = -|v|\,\vec{e}_x$

elle est obtenue en calculant l'expression du courant électrique I de deux facons et en comparant les résultats.

a) D'une part

$$I = \int \vec{J}\overrightarrow{dS} \quad = JS \quad = Jab$$

soit $J = \frac{I}{ab}$

ii) d'autre part

$$\begin{aligned} \vec{J} = \rho\vec{v} &= -ne\vec{v} = ne\,|v|\,\vec{e}_x \\ &= J\vec{e}_x \end{aligned}$$

ce qui donne

$$ne\,|v| = \frac{I}{ab}$$

d'ou

$$|v| = \frac{I}{abne}$$

8) Le champ E_H découle de la relation

$$E_H = vB, \qquad v = \frac{-I}{abne}$$

soit

$$E_H = \frac{-IB}{abne}$$

d'où

$$n = \frac{-IB}{eabE_H}$$

De la relation entre le potentiel électrique U et le champ

$$E = -\operatorname{grad} U \qquad \Longrightarrow \qquad U = -\int \vec{E}\,\overrightarrow{dl}$$

on tire

$$\begin{aligned} U_H &= -\int \vec{E}_H\,\overrightarrow{dl} \\ &= -E_H \int_0^a dy \\ &= -aE_H \end{aligned}$$

9) Nombre de e$^-$par unité de volume et par atome de Cu: De la relation

$$n = \frac{-IB}{ebaE_H}$$

on tire

$$n = \frac{IB}{ebU_H}$$

Application numérique

$$\begin{array}{llcll} b & = 10^{-4}m & , & \varrho_{vol}\,(cu) & = 9000kg/m^3 \\ I & = 10A & , & \mathrm{m}_{mole}\,(cu) & = 63g \\ B & = 1Tesla & , & e & = 1.610^{-19}C \\ U_H & = 5.510^{-6}V & , & N & = 6.0210^{23}\ \text{atomes/mole} \end{array}$$

$$\begin{aligned} n &= \tfrac{10A\times 1Tesla}{1.610^{-19}C\times 10^{-4}m\times 5.510^{-6}V} \\ &= 1.14\times 10^{29}e^-/m^3 \end{aligned}$$

Le nombre d'atomes par m^3

$$\begin{aligned} \tfrac{m_{vol}\times N}{m_{mole}} &= \tfrac{9000kg/m^3\times 6.0210^{23}atomes/mole}{63\times 10^{-3}kg} \\ &= 8,6\times 10^{28}\ \text{atomes}/m^3 \end{aligned}$$

Le nombre d'éléctrons par atome est alors

$$\frac{1.14\times 10^{29}e^-/m^3}{8,6\times 10^{28}\ \text{atomes}/m^3} = 1.33\ \mathrm{e}^-/\text{atome}$$

Exercice IV: *interaction entre conducteurs*

1) Schéma d'illustration

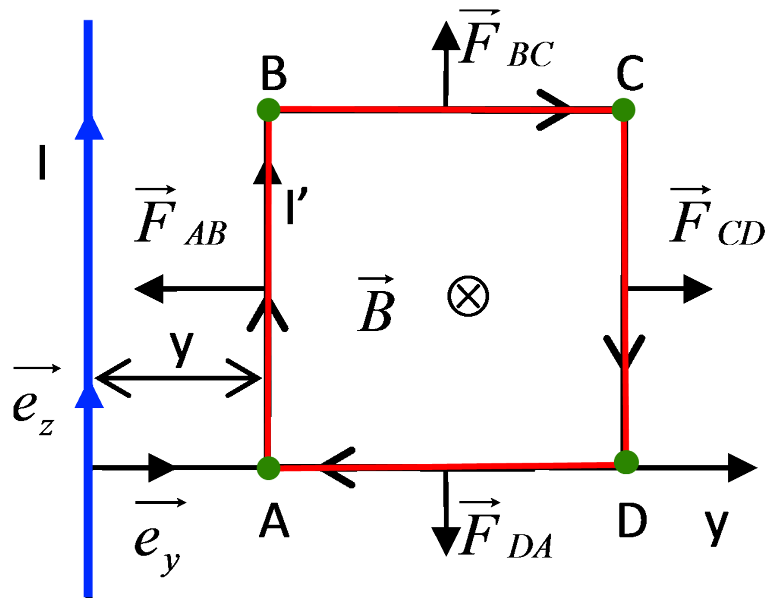


Figure 12: force magnetique exercée par un fil sur un cadre

2) Expression du champ $\vec{B}_1$ crée par le fil

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\rho}\vec{e}_\varphi$$

3) Force $\vec{F}_{12}$ exercée par le fil sur le cadre ABCD.

On a 2 conducteurs:

– Un fil infini parcouru par un cournat I_1 créant un champ magnétique $\vec{B}_1$,

– Un cadre $ABCD$ dans le plan (ρ, φ) parcouru par un courant I_2 créant un champ magnétique $\vec{B}_2$:

En général on a:

Force $\vec{F}_{12}$ exercée par $\vec{B}_1$ sur le cadre ABCD parcouru par I_2

Force $\vec{F}_{21}$ exercée par $\vec{B}_2$ sur le fil parcouru par I_1

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \vec{0}$$

Pour faire le calcul de $\vec{F}_{12}$, on prendra l'exemple où le cadre ABCD dans le plan yOz; c'est à dire $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Dans ce cas le plan $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$ coincide avec $(\vec{e}_y, -\vec{e}_x)$ càd:

$$\vec{e}_\rho = \vec{e}_y \quad , \qquad \vec{e}_x = -\vec{e}_\varphi$$

et

$$\begin{aligned} \vec{B}_1 &= -\frac{\mu_0 I1}{2\pi y}\vec{e}_x \\ \vec{B}_1 &= \frac{-b}{y}\vec{e}_x, \qquad b = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \end{aligned}$$

Par définition la force $\vec{F}_{12}$ exercée par $\vec{B}$ sur le cadre est

$$\begin{aligned} \vec{F}_{12} &= \int_{ABCDA} I_2 \overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}_1 \\ &= \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{BC} + \vec{F}_{CD} + \vec{F}_{DA} \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} \vec{F}_{AB} &= \int_{AB} I_2 \overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}_1 \\ \vec{F}_{BC} &= \int_{BC} I_2 \overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}_1 \\ \vec{F}_{CD} &= \int_{CD} I_2 \overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}_1 \\ \vec{F}_{DA} &= \int_{DA} I_2 \overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}_1 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \int_{AB} I_2 \overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}_1 &= -I_2 b \int_0^a \frac{dz}{y}\ \vec{e}_z \wedge \vec{e}_x &&= -I_2 \frac{ab}{y}\vec{e}_y \\ \int_{BC} I_2 \overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}_1 &= -I_2 b \int_y^{y+a} \frac{dy}{y}\ \vec{e}_y \wedge \vec{e}_x &&= I_2 b \ln \frac{y+a}{y}\ \vec{e}_z \\ \int_{CD} I_2 \overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}_1 &= = -I_2 b \int_a^0 \frac{dz}{y+a}\ \vec{e}_z \wedge \vec{e}_x &&= I_2 \frac{ab}{y+a}\ \vec{e}_y \\ \int_{DA} I_2 \overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}_1 &= = -I_2 b \int_{y+a}^{y} \frac{dy}{y}\ \vec{e}_y \wedge \vec{e}_x &&= -I_2 b \ln \frac{y+a}{y}\ \vec{e}_z \end{aligned}$$

Noter que

$$\vec{F}_{BC} = -\vec{F}_{DA}$$

La résultante des forces $\vec{F}$ agissant sur le cadre est

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{CD} \\ &= -I_2 ab \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+a}\right)\vec{e}_y \\ &= \frac{-\mu_0 I_{12} I_2 a^2}{2\pi y(y+a)}\vec{e}_y \end{aligned}$$

Si le cadre était libre, il serait attiré vers le fil c'est-à-dire vers la région où est plus intense pour que le flux de B à travers le cadre soit maximum (*règle du flux maximal*)

4) Autre méthode

Le travail des forces magnétiques pour un déplacement virtuel dy du cadre est:

$$dW = \begin{cases} \vec{F}.\overrightarrow{dl} = Fdy \\ I_2 d\Phi \end{cases} \Rightarrow \quad F = I_2 \frac{d\Phi}{dy}$$

Le flux magnétique est

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint \vec{B}.\overrightarrow{dS} \\ &= -\iint \left(\vec{B}.\overrightarrow{e}_x\right) dzdy \\ &= -\int_0^a dz \int_y^{y+a} \frac{-bdy}{y} \\ &= ab \ln \frac{y+a}{y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dy} &= ab\left(\frac{1}{y+a} - \frac{1}{y}\right) = \frac{-\mu_0 I a^2}{2\pi y(y+a)} \\ F &= \frac{-\mu_0 I I' a^2}{2\pi y(y+a)} \end{aligned}$$